第４講　微分法・積分法①

【CHECK & UP】

1　[1]　3 次関数 $f(x)=x^3-5x+1$ のグラフについて，次の問いに答えよ．

(1)　$y=f(x)$ 上の点 $(2,\ -1)$ における接線 l の方程式，およびこの点において接線に垂直な直線 m を求めよ．

(2)　接線 l が接点以外で交わる点の x 座標を求めよ．

[2]　3 次関数 $y=x^3-3x^2+1$ のグラフに点 $(0,\ 6)$ から引いた接線の方程式を求めよ．

2　[1]　$(3,\ 4)$ を通り，放物線 $y=-x^2+4x-3$ に接する直線 l の方程式，および接点の x 座標を求めよ．

[2]　3 次関数 $y=x^3-ax+2$ が直線 $y=2x$ に接するとき，定数 a の値を求めよ．

3　[1]　2 つの放物線 $y=x^2+5$ と $y=-2x^2-1$ の共通接線の方程式を求めよ．

[2]　2 曲線 $y=2x^3$，$y=3x^2+a$ が接するとき，定数 a の値を求めよ．

4　$f(x)=\dfrac{9}{8}x^3-9x^2+18x$ の $0\leqq x\leqq 3$ における最大値と最小値をとる x の値をそれぞれ求めよ．

5　x についての方程式 $2x^3-12x^2+18x+k=0$ の解の個数を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 ［1］ a を定数とし，放物線 $y=x^2+2ax-a^3-2a^2$ を C，その頂点を P とする．

(1) 頂点 P の座標は $\left(\boxed{\text{アイ}},\ -a^{\boxed{\text{ウ}}}-\boxed{\text{エ}}\,a^2\right)$

である．したがって，どのような定数 a についても，頂点 P は

$$y=x^{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}\,x^2$$

のグラフ上にある．

(2) a が $-3\leqq a<1$ の範囲を動くとする．頂点 P の y 座標の値が最大となるのは

$$a=\boxed{\text{キ}} \text{ と } a=\boxed{\text{クケ}}$$

のときであり，最小となるのは

$$a=\boxed{\text{コサ}}$$

のときである．

［2］ 関数 $f(x)=2x^3-3x^2+x$ は

$$x=\frac{1}{\boxed{\text{ア}}}-\frac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

で極大となる．また $f(x)$ は

$$f(x)=\left(\frac{1}{\boxed{\text{エ}}}x-\frac{1}{6}\right)\cdot f'(x)-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$$

と変形できるので，$f(x)$ の極大値は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カキ}}}$$

である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　曲線 $y=2x^3-3x$ を C とする.

(1)　C 上の点 $(a,\ 2a^3-3a)$ における C の接線の方程式は

$$y=(\boxed{ア}a^{\boxed{イ}}-\boxed{ウ})x-\boxed{エ}a^{\boxed{オ}}$$

である.

(2)　(1)で求めた接線が点 $(1,\ b)$ を通るのは

$$b=\boxed{カキ}a^{\boxed{ク}}+\boxed{ケ}a^{\boxed{コ}}-\boxed{サ}$$

が成り立つときである.

(3)　したがって，点 $(1,\ b)$ から C へ相異なる３本の接線が引けるのは

$$\boxed{シス}<b<\boxed{セソ}$$

のときである.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ 関数 $f(x)=\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2$ のグラフを C とする．

C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における C の接線 l の方程式は

$$y=(t^2-\boxed{\text{ア}}\,t)x-\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}t^3+t^2+\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．接線 l と C の共有点の x 座標は，t および $\boxed{\text{カキ}}\,t+\boxed{\text{ク}}$ である．

したがって，C と l が 1 点だけを共有するのは，$t=\boxed{\text{ケ}}$ のときである．

［2］ 3 次曲線

$C：y=f(x)=x^3-3x$

は直線

$l：y=px+q$

と点 A で接し，点 B で交わっているとする．

(1) 関数 $f(x)$ は $x=\boxed{\text{アイ}}$ のとき極大値 $\boxed{\text{ウ}}$，$x=\boxed{\text{エ}}$ のとき極小値 $\boxed{\text{オカ}}$ をとる．

(2) 点 A，B の x 座標をそれぞれ a，b（ただし $a<0<b$）とする．このとき p，q，b を，a を用いて表すと

$p=\boxed{\text{キ}}\,a^{\boxed{\text{ク}}}-\boxed{\text{ケ}}$

$q=-\boxed{\text{コ}}\,a^{\boxed{\text{サ}}}$

$b=\boxed{\text{シス}}\,a$

である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　微分法・積分法①

1　Oを原点とする座標平面において，放物線 $y=2x-x^2$ を C とし，C の軸を l とする．C 上で x 座標が a である点をP，$2a$ である点をQとする．ただし，$a>0$ とし，Pは l 上にないとする．また，l に関してPと対称な点をRとする．

(1)　Rの x 座標は $\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}$ であり，RとQが一致するような a の値は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

以下，$0<a<\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ とする．

(2)　四角形OPQRの面積 S を a を用いて表すと

$$S=\boxed{\text{オ}}(a^3-\boxed{\text{カ}}a^2+a)$$

である．S は $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき最大値をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\boxed{2}$ k を正の実数とし，座標平面上に点 P$(1,\ k)$ をとる．また，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-1$ を C とする．

点 $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2-1\right)$ における C の接線 l の方程式は $y=tx-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}t^2-1$ である．また，点 $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2-1\right)$ を通り，接線 l に垂直な直線 m の方程式は

$$\boxed{ウ}x+\boxed{エ}ty=t^{\boxed{オ}}$$

である．直線 m が点 P を通るような t の値の個数を求めよう．

直線 m が点 P を通るとき，t は方程式

$$t^{\boxed{オ}}-\boxed{カ}kt-\boxed{キ}=0$$

を満たす．この方程式の左辺を $f(t)$ と表すとき，関数 $f(t)$ は

$$t=-\frac{\sqrt{\boxed{ク}k}}{\boxed{ケ}}\ のとき，極大値\ \frac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}k\sqrt{k}-\boxed{ス}$$

$$t=\frac{\sqrt{\boxed{ク}k}}{\boxed{ケ}}\ のとき，極小値\ -\frac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}k\sqrt{k}-\boxed{ス}$$

をとる．これより，直線 m が点 P を通るような t の値の個数について

$$0<k<\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\ のとき\ \boxed{タ}\ 個，\ \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}<k\ のとき\ \boxed{チ}\ 個$$

であることがわかる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　3次関数 $f(x)=2x^3-3x^2-36x+6$ を考える．

(1)　$f(x)$ は

$x=$ アイ のとき，極大値 ウエ

$x=$ オ のとき，極小値 カキク

をとる．

(2)　$y=f(x)$ のグラフを C とし，C 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線を l とする．

$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$

$=(x-a)^2($ ケ $x+$ コ $a-$ サ $)$

であるから，C と l との共有点の x 座標は，

$x=a,\quad x=$ シス $a+\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}$

であり，$a=\dfrac{\text{タ}}{\text{チ}}$ のときは，C と l とは接点以外に共有点をもたない．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　微分法・積分法①

【CHECK & UP】

1　［1］　(1)　$f'(x)=3x^2-5$　　$f'(2)=7$

よって接線 l の方程式は　$y=7(x-2)-1$

ゆえに　l：$\boldsymbol{y=7x-15}$

また，法線 m の方程式は　$y=-\frac{1}{7}(x-2)-1$

ゆえに　m：$\boldsymbol{y=-\frac{1}{7}x-\frac{5}{7}}$

> まずは接線の前に直線の方程式について．傾き m，点 $(a,\ b)$ を通る直接は $y=m(x-a)+b$ である．
> 未だに $y-b=m(x-a)$ としている人はいないだろうか．スピードと正確性が要求されるセンター試験において，移項の時間とそれによる符号変化のミスは致命的だ．接線においては，元の式を微分したものに接点の x 座標を代入したものが傾きである．

(2)　接線 l と $y=f(x)$ の交点の x 座標は

$x^3-5x+1=7x-15$　　$x^3-12x+16=0$

$(x-2)^2(x+4)=0$　　$x=2,\ -4$

よって，接点以外に交わる点の x 座標は

$\boldsymbol{x=-4}$

> ３次関数においては接線が再び元の曲線と交わることがある．その際，２式を連立したものは接点の x 座標を「重解」にもつ．それを利用すれば因数分解はたやすく，それにより接点以外の交点が出る．

［2］　$y=x^3-3x^2+1$　より　$y'=3x^2-6x$

$x=t$ における接線の傾きは　$3t^2-6t$

接線の方程式は　$y=(3t^2-6t)(x-t)+t^3-3t^2+1$

よって　$y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+1$

これが $(0,\ 6)$ を通るとき，

$6=-2t^3+3t^2+1$　　$2t^3-3t^2+5=0$

$(t+1)(2t^2-5t+5)=0$　　t は実数より　$t=-1$

よって，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=9x+6}$

> $(0,\ 6)$ を通る直線は $y=mx+6$ と表すことができるが，これを３次関数のグラフと「接する状態にする」ことが困難である．よって，「接点の場所が不定の接線」つまり「接点が動く接線」を作り，それが $(0,\ 6)$ を通る条件を満たす，という解法をとることで「接点が後からわかる」のである．センター試験ではこの「接点の x 座標」が「指定された文字で与えられる」ことが多い．
> ３次方程式の一般的な解法は「因数分解」．上の問題と異なり解が不明であるため「組立除法」が必須の知識となる．

2　［1］　**【解法１】**　$(3,\ 4)$ を通る求める直線は

$y=m(x-3)+4$　とおくことができる．

この直線と　$y=-x^2+4x-3$　の交点の x 座標は

$-x^2+4x-3=m(x-3)+4$

つまり　$x^2+(m-4)x-3m+7=0$　の解．

接するのはこの方程式が重解をもつとき．

この方程式の判別式を D とすると

$D=(m-4)^2-4(-3m+7)=0$　　$m^2+4m-12=0$

$m=2,\ -6$　　このとき重解　$x=\frac{4-m}{2}$　をもつ．

よって，求める接線および接点の x 座標は

$\boldsymbol{y=2x-2,\ x=1}$　　$\boldsymbol{y=-6x+22,\ x=5}$

> 相手が「放物線」であれば，接する状態にすることは容易である．それは「交点を求める方程式」が「重解」をもつことを「判別式 D」で扱うことができるからである．ただし，微分法による解答と異なり，「接点の x 座標」は方程式の「重解」として求める必要がある．重解の公式 $x=\frac{-b}{2a}$ は既知であろうか．
> センター試験においては自ら上記の解法をとることは少ないが，「直線が与えられていて，それを２次関数に接させる」「ある曲線の接線を別の２次関数とも接する状態にしたい（後述）」等の問題で見られる．誘導に乗れるようにしておきたい．ただし「直線 $y=mx+n$ が…」といったフェイントもある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【解法２】 $y=-x^2+4x-3$ より $y'=-2x+4$ 　$x=t$ における接線の傾きは

$-2t+4$ 　接線の方程式は $y=(-2t+4)(x-t)-t^2+4t-3$

よって $y=(-2t+4)x+t^2-3$

これが (3，4) を通るとき $4=(-2t+4)\cdot 3+t^2-3$ 　$t^2-6t+5=0$ 　$t=1，5$

よって求める接線および接点の x 座標は

$y=2x-2$，$x=1$ 　$y=-6x+22$，$x=5$

> 1 [2] と同様の解法である．

[2] $y=x^3-ax+2$ より $y'=3x^2-a$ 　$x=t$ における接線の傾きは $3t^2-a$

接線の方程式は $y=(3t^2-a)(x-t)+t^3-at+2$ 　よって $y=(3t^2-a)x-2t^3+2$

これが $y=2x$ と一致するとき $3t^2-a=2$ かつ $-2t^3+2=0$

よって $t=1$ 　このとき **$a=1$**

> 接線を作り，直線と係数比較した．

3 [1] $y=x^2+5$ より $y'=2x$ 　$x=t$ における接線の方程式は

$y=2t(x-t)+t^2+5$ 　つまり $y=2tx-t^2+5$ ……①

【解法１】 これが $y=-2x^2-1$ と接するのは，この 2 式から y を消去し，x について整理した式 $2x^2+2tx-t^2+6=0$ が重解をもつときである．よって $t^2-4=0$ 　$t=\pm 2$

ゆえに，求める共通接線の方程式は

$y=4x+1$，$y=-4x+1$

【解法２】 $y=-2x^2-1$ より $y'=-4x$

$x=s$ における接線の方程式は $y=-4s(x-s)-2s^2-1$

つまり $y=-4sx+2s^2-1$ ……②

①と②が一致するとき $2t=-4s$ かつ $-t^2+5=2s^2-1$

よって $s=\pm 1$ 　このとき $t=\mp 2$ （複号同順）

ゆえに，求める共通接線の方程式は **$y=4x+1$，$y=-4x+1$**

> 共通接線（接点が別）においては，２放物線であれば解法は様々．
> （解法１）では一方の接線をつくり，もう一方と接する状態にした．接点の x 座標を要求されたときには，もう一方は上記の「重解」を求める必要がある．
> （解法２）では両方の接線をつくり，係数比較した．この解法は「２接点の x 座標が出る」ため，「面積」につなげやすい．
> ちなみに今回の２放物線は「軸が同じ」であるため軸について対称な２本の共通接線が存在する．

[2] $y=2x^3$ より $y'=6x^2$

$x=t$ における接線の傾きは $6t^2$

$y=3x^2+a$ より $y'=6x$

$x=t$ における接線の傾きは $6t$

この 2 つの傾きが一致し，

かつ $x=t$ における 2 曲線の y 座標が一致するとき，

$6t^2=6t$ かつ $2t^3=3t^2+a$

よって $t=0，1$ 　このとき，a はそれぞれ 0，-1 であり，

2 曲線は $x=t$ において共通接線をもち，

2 曲線はこの点で接する．ゆえに，求める a は **$a=0，-1$**

> ２曲線が「接する」すなわちある点において共通接線をもつ．つまり「接点が同じ」である．「接点が別」とは異なり，「接線の方程式」を２本作成することは不要．なぜならば，「接点の y 座標」が同じであるため．これは接線の方程式を作らずとも比較できることである．共通接線が必要ならば，接点の x 座標が「確定」したあとにゆっくり求めればよい．
> この問題の解 a から２グラフの状態を図示してみよ．当然，接点以外の交点を出してからであるが．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

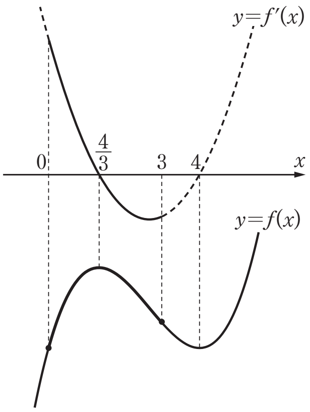
4　$f(x)=\frac{9}{8}x^3-9x^2+18x$　より

$$f'(x)=\frac{27}{8}x^2-18x+18$$
$$=\frac{9}{8}(3x^2-16x+16)$$
$$=\frac{9}{8}(3x-4)(x-4)$$

よって，最大値をとる x は　$x=\mathbf{\frac{4}{3}}$

また，$f(0)=0$，$f(3)=\frac{27}{8}$ より

最小値をとる x は　$x=\mathbf{0}$



$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ は増加
$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ は減少
よって，$f'(x)$ の正負により $f(x)$ の増減がわかることは言うまでもない．その上で，$f'(x)$ の正負は「グラフ」によってわかることを強く意識しているであろうか．決して「増減表を書くことを目的」としてはいけない．さらに $f(x)$ が因数分解でき，かつ「重解をもつ」ならば微分をしなくても $f(x)$ の極大・極小をとる x がわかるが，それは講義で扱う．

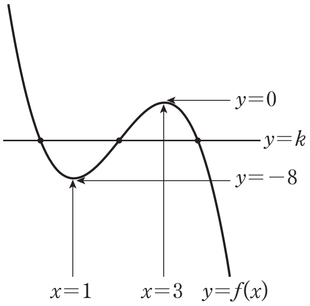
5　$2x^3-12x^2+18x+k=0$　より　$k=-2x^3+12x^2-18x$

$f(x)=-2x^3+12x^2-18x$ とおき，$y=f(x)$ と $y=k$ の共有点の個数が求める解の個数である．

$$f'(x)=-6x^2+24x-18=-6(x-1)(x-3)$$

$x=3$ で極大値　$f(3)=0$
$x=1$ で極小値　$f(1)=-8$　をとる．
よって，グラフより

$k<-8$，$0<k$ のとき　1個
$k=-8$，0 のとき　2個
$-8<k<0$ のとき　3個



３次方程式には２次方程式で多用される「判別式」が存在しない．よって，「３次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標」として扱う．
この問題のように「定数分離」できる場合は，３次関数のグラフが「確定」するので非常に扱いやすい．センター試験でもこの形式のものが散見される．もちろん，分離できない場合は，極大値・極小値の符号（または２極値の積）で解の個数を制御する必要があり，センター試験でも出題例がある．

配点が高い「微分法・積分法」において，まったく時間のロスが許されないのが「微分」に関するパートである．わかっているはずの知識も，時間内に収めることができて初めて点数に結びつく．また，「接線」に関しては様々な言い回しがあるため，ここに挙げた代表例以外にも紹介した問題集などで練習を行い，日本語にまどわされることのない経験を積んでおこう．
また，図形と方程式の知識も合わせて確認しておきたい．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【講義問題　解答例】※記述式における模範解答ではありません．授業を補完するものです．

1 ［1］　$C: y=x^2+2ax-a^3-2a^2=(x+a)^2-a^3-3a^2$

(1)　頂点Pの座標は　$(\boldsymbol{-a},\ -a^3\boldsymbol{-3}a^2)$

$x=-a$，$y=-a^3-3a^2$ とおくと　$a=-x$ より　$y=-(-x)^3-3(-x)^2=x^3-3x^2$

よって，点Pは a の値によらず　$y=x^3\boldsymbol{-3}x^2$　のグラフ上にある．

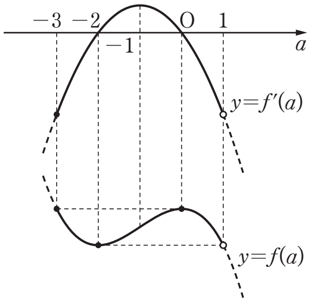
(2)　$f(a)=-a^3-3a^2=-a^2(a+3)$　とおくと

$f'(a)=-3a^2-6a=-3a(a+2)$

$-3\leqq a<1$ のとき

$f(a)$ が最大となるのは　$a=0,\ -3$　のとき

$f(a)$ が最小となるのは　$a=-2$　のときである．



［2］　$f(x)=2x^3-3x^2+x$

$f'(x)=6x^2-6x+1$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ のとき　$f'(x)=0$ となり，$x=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}-\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{6}}$ で $f(x)$ は極大をとる．

ここで　$f(x)\div f'(x)$ を計算することにより

$$f(x)=\left(\frac{1}{\boldsymbol{3}}x-\frac{1}{6}\right)\cdot f'(x)-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{3}x-\frac{1}{6} \\ \hline 6x^2-6x+1 & 2x^3-3x^2+x \\ & 2x^3-2x^2+\frac{1}{3}x \\ \hline & -x^2+\frac{2}{3}x \\ & -x^2+x-\frac{1}{6} \\ \hline & -\frac{1}{3}x+\frac{1}{6} \end{array}$$

よって，$f(x)$ の極大値は

$$f\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)+\frac{1}{6}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{18}}$$

2 (1)　$y'=6x^2-3$ より　$x=a$ における C の接線の傾きは　$6a^2-3$

よって，求める接線の方程式は　$y=(6a^2-3)(x-a)+2a^3-3a$

ゆえに　$y=(\boldsymbol{6}a^2\boldsymbol{-3})x\boldsymbol{-4}a^3$

(2)　(1)の方程式が $(1,\ b)$ を通るとき　$b=6a^2-3-4a^3$

ゆえに　$b=\boldsymbol{-4}a^3\boldsymbol{+6}a^2\boldsymbol{-3}$　……①

(3)　$(1,\ b)$ を通る C の接線が3本存在するのは，①を満たす異なる a が3個存在するとき．

$f(a)=-4a^3+6a^2-3$ とおくと

$f'(a)=-12a^2+12a=-12a(a-1)$

$f(0)=-3$　　$f(1)=-1$

よって，求める b の範囲は　$\boldsymbol{-3<b<-1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］ C：$f(x)=\frac{1}{3}(x+1)(x-2)^2=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}$ より $f'(x)=x^2-2x$

$x=t$ における C の接線の方程式は　$y=(t^2-2t)(x-t)+\frac{1}{3}t^3-t^2+\frac{4}{3}$

よって　$y=(t^2-\mathbf{2}t)x-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}t^3+t^2+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$

これと，C の共有点の x 座標は　$\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{4}{3}=(t^2-2t)x-\frac{2}{3}t^3+t^2+\frac{4}{3}$ より

$x^3-3x^2-(3t^2-6t)x+2t^3-3t^2=0$

$(x-t)^2(x+2t-3)=0$　　よって　$x=t,\ \mathbf{-2}t+\mathbf{3}$

C と１点のみ共有するのは　$t=-2t+3$　　つまり　$t=\mathbf{1}$　のときである．

［2］ C：$y=f(x)=x^3-3x$　　l：$y=px+q$

(1) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

よって　$x=\mathbf{-1}$ で極大値 $f(-1)=\mathbf{2}$，$x=\mathbf{1}$ で極小値 $f(1)=\mathbf{-2}$ をとる．

(2) $px+q=x^3-3x$　つまり　$x^3-(p+3)x-q=0$　の解が a，a，b である．

解と係数の関係より

$a+a+b=0$ ……①　　$a^2+ab+ba=-(p+3)$ ……②　　$a^2b=q$ ……③

①より　$b=\mathbf{-2}a$　これを②，③に代入して　$p=\mathbf{3}a^2\mathbf{-3}$，$q=\mathbf{-2}a^3$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　微分法・積分法①

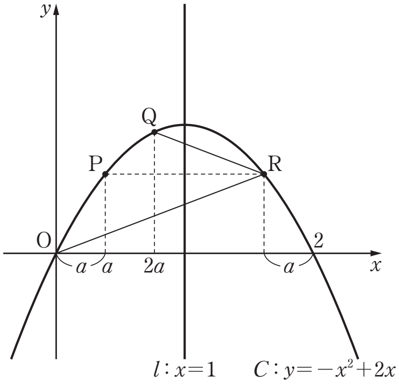
1　$C: y=-x^2+2x=-x(x-2)=-(x-1)^2+1$　より　$l: x=1$

(1)　図形の対称性より右図からRのx座標は$\boldsymbol{2-a}$

Rと Qのx座標が一致するとき

$$2-a=2a \qquad a=\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}$$

以下，$0<a<\dfrac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}$ で考える．



(2)　$\mathrm{P}(a,\ 2a-a^2)$，$\mathrm{Q}(2a,\ 4a-4a^2)$，$\mathrm{R}(2-a,\ 2a-a^2)$

より四角形OPQRの面積Sは

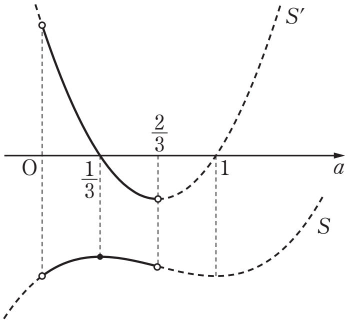
$$S=\triangle\mathrm{OPR}+\triangle\mathrm{QPR}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PR}\cdot(\triangle\mathrm{OPR}\text{と}\triangle\mathrm{QPR}\text{の高さの和})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(2-2a)(4a-4a^2)=\boldsymbol{4}(a^3-\boldsymbol{2}a^2+a)$$

$$S'=4(3a^2-4a+1)=4(3a-1)(a-1) \quad \left(0<a<\frac{2}{3}\right)$$

よって，Sは　$a=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}$　で最大値をとる．



2　$C: y=\dfrac{1}{2}x^2-1$ より　$y'=x$

$\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2-1\right)$ におけるCの接線lの方程式は　$y=t(x-t)+\dfrac{1}{2}t^2-1$　　$y=tx-\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}t^2-1$

$\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2-1\right)$ におけるCの法線mの方程式は　$t\neq0$ のとき

$$y=-\frac{1}{t}(x-t)+\frac{1}{2}t^2-1=-\frac{1}{t}x+\frac{1}{2}t^2 \qquad \boldsymbol{2}x+\boldsymbol{2}ty=t^3\quad(t=0\text{のときも成立})$$

これがP$(1,\ k)$を通るとき　$2+2kt=t^3$　　つまり　$t^3-\boldsymbol{2}kt-\boldsymbol{2}=0$ を満たす．

この式の左辺を$f(t)$とすると　$f(t)=t^3-2kt-2$　　$f'(t)=3t^2-2k$

よって　$3t^2-2k=0$　　つまり　$t=\pm\sqrt{\dfrac{2k}{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{6k}}{3}$　のとき　$f'(t)=0$

ここで　$f(t)=f'(t)\cdot\dfrac{1}{3}t-\dfrac{4}{3}kt-2$ より，$f(t)$は

$t=-\dfrac{\sqrt{\boldsymbol{6}k}}{\boldsymbol{3}}$ のとき，極大値　$f\left(-\dfrac{\sqrt{6k}}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}k\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{6k}}{3}\right)-2=\dfrac{\boldsymbol{4}\sqrt{\boldsymbol{6}}}{\boldsymbol{9}}k\sqrt{k}-\boldsymbol{2}$

$t=\dfrac{\sqrt{6k}}{3}$ のとき，極小値　$f\left(\dfrac{\sqrt{6k}}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}k\cdot\dfrac{\sqrt{6k}}{3}-2=-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}k\sqrt{k}-2$　をとる．

$k>0$ であることを考慮して

(極小値)$<0<$(極大値)　すなわち　$-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}k\sqrt{k}-2<0<\dfrac{4\sqrt{6}}{9}k\sqrt{k}-2$　となるのは

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$k\sqrt{k}>\dfrac{9}{2\sqrt{6}}$　より　$k^3>\dfrac{27}{8}$　　よって　$k>\dfrac{3}{2}$ のとき

よって，$f(t)=0$ の解の個数は

$k>\dfrac{3}{2}$ のとき　**3** 個　　$k=\dfrac{3}{2}$ のとき　2 個　　$0<k<\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ のとき　**1** 個

3　(1)　$f(x)=2x^3-3x^2-36x+6$　より　$f'(x)=6x^2-6x-36=6(x-3)(x+2)$

$f(x)$ は　$x=\mathbf{-2}$ のとき　極大値 **50**

$x=\mathbf{3}$ のとき　極小値 **−75** をとる．

(2)　$C:y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線 l は

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$　つまり　$y=(6a^2-6a-36)(x-a)+2a^3-3a^2-36a+6$ より

$y=(6a^2-6a-36)x-4a^3+3a^2+6$

よって　C と l の共有点の x 座標は　$f(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$　つまり

$f(x)-\{f'(a)(x-a)+f(a)\}=0$ の 2 解

$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$

$=2x^3-3x^2-36x+6-\{(6a^2-6a-36)x-4a^3+3a^2+6\}$

$=2x^3-3x^2-(6a^2-6a)x+a^2(4a-3)$　……①

C と l は $x=a$ で接するので，①は $(x-a)^2$ を因数にもつ．

x^3 の係数および定数項を参照して　①$=(x-a)^2(\mathbf{2x+4a-3})$

よって，C と l の共有点の x 座標は　$x=a,\ \mathbf{-2a+\dfrac{3}{2}}$　である．

また　$a=-2a+\dfrac{3}{2}$　　つまり　$a=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ のときは

C と l は接点以外に共有点をもたない．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。